

基于学科核心素养的“概率论与数理统计” 课程建设与实践

蔺 杉

(东北师范大学数学与统计学院)

【摘 要】总书记在全国高校思想政治工作会议上强调，把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程。我校“概率论与数理统计”课程充分从学科核心素养和学生专业特点出发，以知识内涵教育为根基，以实践应用为延伸，从数学和统计学两个不同学科视角认识和理解“概率论和数理统计”，将学科思想、课程资源、教学创新与思政元素有效融合，开创了知识传授、能力培养、价值引领“三位一体”的具有自然科学气质的课程育人系统。

一、课程性质与教学目标

(一) 课程性质与发展历程

1. 课程性质

“概率论与数理统计”，54学时，3学分，是全校通识选修课程，对全校非数学和统计学专业的大二年级本科生开放，开课时间为第3学期，先修课程为“高等数学”，年平均选课人数在400人左右。“概率论与数理统计”是大学数学教育中最重要的基础课之一，虽然是通识选修课程，但所有理科专业和交叉文科专业均开设了该门课程。该课程的根本目的是在“高等数学”的学习基础上，丰富学生的随机理论知识和统计推断方法。因此可以认为，该课程是数据科学的重要数学基础。在当前国家发展大数据和人工智能战略的背景下，学习本门课程，对于交叉学科专业的学生来说，具有非常重要的意义，可以激发学生对于本专业与数据科学交叉领域知识的学习热情，启发跨界科研灵感，实现对学生综合科研实践能力的培养。

2. 发展历程

经过几代人的不懈努力，该课程建设已初步形成了一定的特色，在东北师范大学老校长史宁中教授的带领下，于2007年入选国家精品课程。近年来，我们不断传承精髓，提升理念，聚焦前沿，重塑内容，创新教法，立德树人。2020年，本课程入选全国首批国家级一流本科课程。

(二) 教学目标

通过本课程的学习，要求学生：在知识层面上，理解和掌握“概率论与数理统计”的

基本概念、理论和方法，能够归纳和内化基本思想，梳理和建构知识体系和理论框架；在能力层面上，具备解读随机现象、构建概率分布、描述数据趋势、推断统计规律、运用软件编程计算来解决实际问题的能力；在素养层面上，了解“概率论与数理统计”的发展历程，认识大数据时代下的数据特征，夯实数据科学的数学基础，具有一定国际交流水平，具备服务基础教育、发展社会行业、投身科学研究的基本功底和学科素养；在价值层面上，塑造自身能够利用随机理论和数据思维理解和弘扬社会主义核心价值观的品质。

二、建设理念与特色创新

（一）建设理念与思路

首先，“概率论与数理统计”既是一门数学专业课，也是一门统计学专业课。课程的建设理念是从数学和统计学的核心素养出发，以不同的学科视角审视、认识、理解、融汇专业知识，进而联系现实问题和实践应用。其次，由于选课的学生来自全校各个专业，因此从“以学生为中心”和“以需求为导向”的角度看，课程建设要围绕“让具有不同专业背景的学生将各自的专业知识与我们的课程内容产生共鸣”这个中心，以课程内涵和思想作为引导工具，引领学生未来在各自专业领域激发好的灵感，发现好的问题，产出好的成果。

（二）特色创新

1. 基于课程定位和一流学科支撑的建设特色

我们将本门课程定位于“数据科学的重要数学基础”，以数据与人工智能发展的时代特征和研究领域方向为着眼点，驱动课程内容的重塑和教学模式的改革。同时，本门课程既属于数学学科的随机理论延展，又属于统计学学科的理论根基，因此可以发挥数学和统计学两个国家双一流学科的科研和平台优势，将科教融合、理念融合、实践融合，以学科发展历程和前沿成果为素材开发导课，开创基于新时代特征的数据案例教学素材与模式。

2. 学科和社会主义核心素养引领的改革创新

在课程内容重塑上，我们增加了导课，宏观介绍学科发展、理论思想、前沿应用，培养学生学科的大局视野；用具有时代感的数据案例替代陈旧的乏味题材，作为课程切入点，引人入胜；用问题驱动探究式学习，培养学生的思辨意识和能力；在部分内容上引入了多元统计分析的概念，拓展知识宽度，深化课程难度，挖掘学生的内在潜力。

在教学模式改革上，我们翻转了传统的“定义—性质—应用”的教学顺序，挑战以学生为中心，以数据为起点，以建模为手段，以推断为目的，以批判为评价的数据思维教学模式；将实践融入课堂，让理论讲授与软件实操相结合，为学生提供利用软件编程计算和制作概率分布表的教学资源，培养学生的动手能力和综合素质；引进优秀英文阅读资源，在课堂上给出重要概念的英文表达，开阔学生的眼界。

在立德树人教育上，我们紧密结合课程内容打造原创思政教学案例，开展课堂社会主义核心价值观教育，通过教学寓意价值，通过思政深化学识。

三、教学改革拟解决的重点问题

教学的重点与难点主要分布在三个方面：

首先，如何让学生认识理论的基本思想、掌握知识架构，从而与各自专业知识相互融合？这是培养高阶思维的问题。其次，如何让学生在数学思维基础上建立批判性的数据逻辑，以及提高解决问题的实操能力？这是培养创新能力的问题。再次，如何通过教学提升学生在认知、思辨、实践上的综合素质，以及价值观和人生态度上的素养和修为？这是培养挑战意识的问题。针对上述问题，我们持续开展教学改革与实践。

四、改革实践的评价与成效

经过重塑后的课程内容更适于帮助学生形成随机理论素养和建立数据思维逻辑。教改后的课堂，学生更愿意参与，学习更积极，更善于思辨和勇于挑战有难度的问题。相应地，成绩提升明显，尤其是高分数段人数比例显著增加。学生对课堂教学的满意度超过了98%。学校督学听课在所有评估内容中都给出了A级评价，对课程的各个环节设计和教学质量给予了充分的肯定。同行在听取课程建设汇报并观看了示范课之后，给出了这样的评价：这是一门有积累和传承、有思想和高度、有创新和挑战的好课，部分内容寓意很深，学生可以从中学到很多。

我们将2018学年和2019学年两轮课程的成绩数据进行对比，发现在箱线图（如图1所示）中，2019学年成绩要全面好于2018学年成绩，极差和四分位差大体相似，说明班级个体差异没有明显变化。从统计指标中可以看出：均值和中位数的提升相当明显，均值提高了约8%，中位数提高了约15%；2019学年成绩中出现了满分，说明对于拔尖人才的培养取得了一定的成效。在数据表中，90分以上、80~89分、70~79分三个分数段的人数比例，2019学年比2018学年有了明显提高；不及格率有了明显下降。

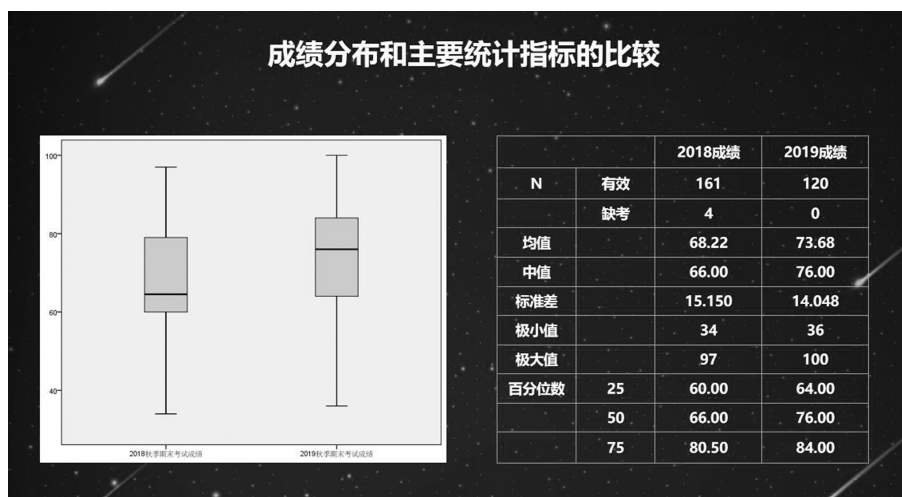


图1 两轮课程箱线图与成绩数据比较

从雷达图（如图 2 所示）中可以看出，2018 学年成绩分布不协调；而 2019 学年成绩分布趋向于平衡，2019 学年成绩图形明显向高分数段方向平移，说明整体水平有显著提升。

各分数段人数比例与整体结构的比较

	2018 学生		2019 学年	
	人数	比例	人数	比例
应考人数	161	97.58%	120	100.00%
90~100 分	15	9.32%	16	13.33%
80~89 分	28	17.39%	31	25.84%
70~79 分	31	19.25%	28	23.33%
60~69 分	52	32.30%	24	20.00%
59 分及以下	35	21.74%	21	17.50%
平均分	68.27		73.68	

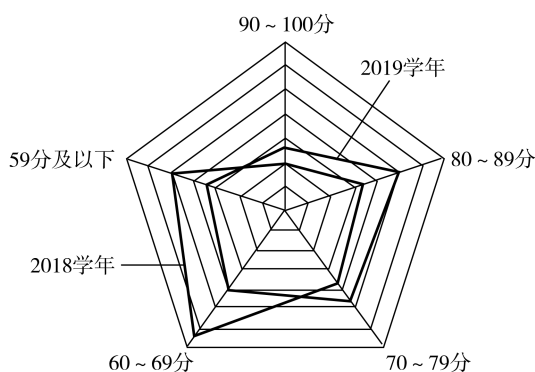


图 2 两轮课程成绩的雷达图比较

五、典型案例：关于“置信区间”教学设计的示例解读

教学内容：§ 7.4 区间估计（第七章 参数估计）

第七章的参数估计是数理统计部分最重要的两个统计推断教学内容之一，而区间估计则是除原点估计以外最重要和普遍的参数估计方式。因此，选择这一节的内容作为示例具有典型性、代表性和推广性。在这一节的一般性教学设计中，主要强调构建置信区间的方法和步骤，掌握评价区间估计的标准。而在我们的设计中额外增添和深化了从点估计到区间估计的动机思维，让学生理解区间估计的统计学思想，站在概率论和统计学的不同角度思考和理解置信水平与覆盖概率这两个相似概念，进而巩固对于随机理论的认识。此外，在评价区间估计标准的问题上，我们综合了信息量、定位精度、估计信度三个维度，结合课程思政素材对实际问题开展思辨与评判，从而在课堂上“以知识演变动机为切入，以知识结构程序为脉络，以知识前后衔接为逻辑，以知识内涵表达为灵魂”的学科核心素

养培育（如图3所示）。



说课》


01 课程简介	课程名称：概率论与数理统计 章节名称：第七章 参数估计（§7.4 区间估计）	课程性质：全校通识选修 授课教师：简杉 副教授
02 教学目标	知识与技能：引导思想、解读概念、探索变化 过程与方法：辨析定义、评价指标 情感态度与价值观：科普、爱国主义教育、明理（人生态度引导）	
03 教学思路	1. 案例引出区间估计的基本思想。 意图：创造思维动机，引出置信区间的定义。 2. 在置信区间定义下讨论“置信”。 意图：复习“随机性”，加深理解“置信区间”。 3. 研讨置信水平和覆盖概率。 意图：复习大数定律，培养统计学思维。	
04 设计意图	4. 探究置信区间评价标准。 意图：培养批判性思维，深化对课程内容的理解。 5. 课堂思政教育。 意图：立德树人教育，培养实践思维和联想能力。	
05 重点难点	1. 区间估计的基本思想 2. 对于置信区间随机性的认识 3. 对预设置信水平和观测置信水平的理解	

图3 本堂课程说课提纲

首先，以游戏开篇，通过刮刮卡的情境（如图4所示）引入购买彩票的两种策略。通过教学引导，学生逐步深入理解两种策略的象征和内涵，从上一节讲授的点估计知识顺利衔接和过渡到本节区间估计的内容上。紧接着，通过抽象的数学表达给出区间估计的定义。对比点估计的概念，通过启发式教学让学生明白点估计虽然直接，但是缺乏对于信度的考察，而我们在判别和决策的时候通常会在精度和信度中找到一个平衡，从而为解决实际问题提供一个行得通的方案。这样，着眼点就完全聚焦到区间估计的内容上了，在潜移默化中培养了学生对于新知识的动机思维，也就是从学术的角度回答了“为什么学”的问题。

大奖就一个，幸运刮出来！

 VS 



简单地，我们可以有两种策略：

- ◆ 只买一张，并坚信能中奖！
- ◆ 多买几张，相信其中有一张能中奖！

图4 情境案例素材

其次，在介绍置信区间这个概念的时候，关于“置信”二字的理解，我们组织了课堂讨论，提出了“到底是区间是置信的，还是区间包含未知参数是置信的”这样的问题。问题的关键在于学生如何认识区间的随机性。随机性是概率论产生的原由，也是统计学与数学相区别的根基。统计学核心素养中一定包括对于随机性的正确认识，所以“置信区间到底是一个随机区间，还是一个确定区间”是这部分内容的重点和难点。通过讨论、总结、讲评等方式，最终汇总成两个意见：分别从“基于数学思想的观测区间包含参数的频率”的角度和“基于概率论思想的随机区间包含参数的概率分布”的角度给学生灌输不同的学科思想，让学生比较不同学科特点，理解不同学科站位，形成高观点下的综合学科素养，培养学生的思辨意识和精神。

再次，在介绍置信水平和置信区间覆盖概率的概念时，又提出了一个研讨问题：“如何理解二者的区别？”要求学生从概率和统计的不同角度审视上述两个概念，在这个过程中深化学生对于概率论和统计学的理解和宏观认识，进一步巩固伯努利大数定律的结论。通过这个环节，学生基本明确了置信水平是概率，是置信区间的自然属性，是未知的，在构建置信区间之前是需要提前设定的；而覆盖概率其实是频率，是置信区间的观测属性，是可以通过数据计算的，是置信区间产生之后的一个统计学指标。这样，在对比研判的过程中实现了对抽象、归纳、类比等数学思想和统计学数据思维的培养（如图5所示）。

两个问题的研讨

关于 $1-\alpha$ 置信水平，下列说法哪个正确？

1. 表示未知参数 **落在** 置信区间内的概率为 $1-\alpha$ 。
2. 表示置信区间 **包含** 未知参数的概率为 $1-\alpha$ 。

如何理解置信水平(confidence)和区间覆盖概率(coverage)?

置信水平：事先设定的，置信区间的自然属性，概率论的概念

覆盖概率：事后计算的，置信区间的观测属性，统计学的概念

图5 学科概念与思想的辨析与研讨

最后，在评价区间估计的两个重要指标“区间长度和置信水平”时，我们又引导学生参与探究二者的矛盾关系，启发学生发现样本容量对于两个指标的利好影响，在这一过程中培养学生对于混杂信息的分析能力，以及全面考察影响因素的综合辨析能力，更深层次地将本节内容拓展到对于“信息、定位、信度”的认识上，从而更好地与其他实际问题相关联（如图6所示）。

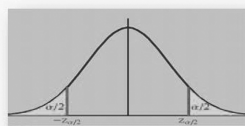
如何评价置信区间?

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, μ 未知, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. $\rightarrow P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$. $\rightarrow (\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$.

区间长度: $2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$, 衡量定位精度, 越短定位越准

置信水平: $1-\alpha$, 衡量区间包含未知参数的可信程度, 越大可信性越高



$1-\alpha$ 增大, α 减小, $z_{\alpha/2}$ 增大, 在 σ 和 n 不变的情况下, 区间变长, 定位精度变弱

如果可以使 n 增大呢? 会怎么样?

图6 置信区间的评价指标

此外, 我们更深入地给出了具有多元统计意义 (如图7所示) 的联合置信带的简单描述, 对比一维的置信区间, 拓展了其多元意义和价值, 强化了对学有余地的拔尖人才的培养。在立德树人教育方面, 我们创造性地以国庆阅兵为场景, 通过科普导弹命中精度, 弘扬了爱国主义精神; 以“瞄准目标、敢于作为”为素材指导学生的人生态度。通过作业布置, 加强学生对社会主义核心价值观的认识和领悟 (如图8所示)。

知识拓展: 具有多元统计意义的联合置信带

Table 1 Observations for simple linear regression model

i	x_i	y_i
1	1.9	0.7
2	0.8	-1.0
3	1.1	-0.2
4	0.1	-1.2
5	-0.1	-0.1
6	4.4	3.4
7	4.6	0.0
8	1.6	0.8
9	5.5	3.7
10	3.4	2.0

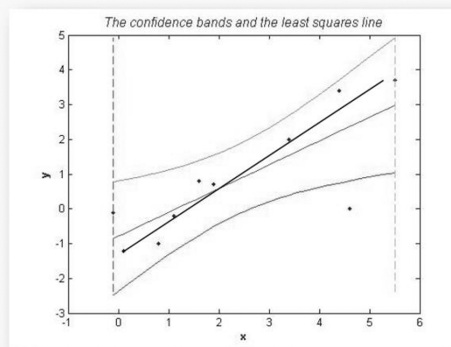


图7 置信区间的多元统计意义

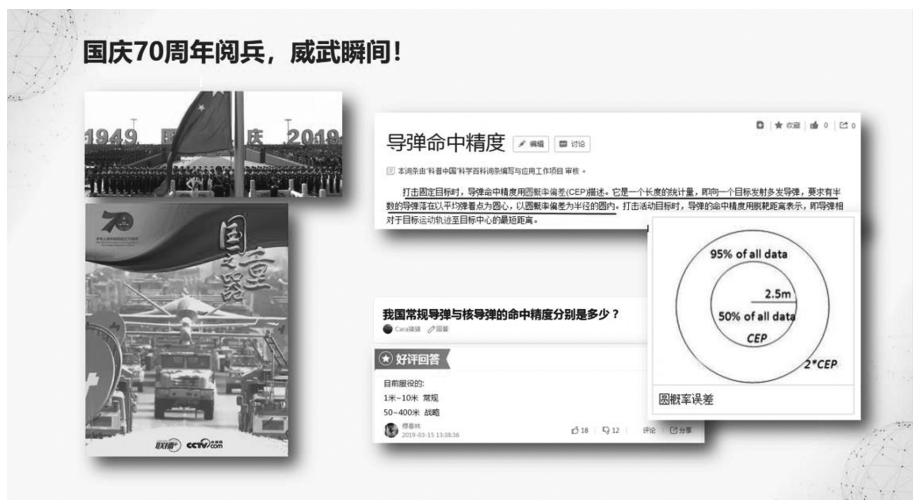


图 8 课程思政教学案例

教学反思：

(1) 导课案例是否可以引起学生足够的兴趣，从而把他们牢固地拴在课堂上？有没有更好的例子可以开发，并为今后的课程建设服务？通过调研收集了部分学生的建议，针对大家感兴趣的话题领域，我们将开发更具时代性的课堂导入案例。

(2) 通过点估计和区间估计的比较，是否可以很好地给学生灌输定位和评价定位精度的思想？学过该部分知识后，学生是否可以学以致用，联系实际？我们计划布置相关的课后实践作业，鼓励学生思考和挖掘相关实际问题，并在问题中指明或表达定位精度和定位信度的含义，通过作业讲评帮助学生进一步深入理解相关知识。

(3) 通过置信水平和区间覆盖概率的概念比较，学生是否对概率论和统计学的印象更加深刻？是否更明确它们各自的特点和用途？在之后的课堂上，我们将持续引导、启发学生思辨相关内容，让学生形成每个相关概念都要从不同角度审视和辨析的思维习惯，通过不断积累培育学生的概率论和统计学素养。

(4) 通过课堂思政教育，学生的人生观和科学进取精神是否有了显著提升？在课程进展中，我们将在不同阶段对学生进行问卷调查，通过平行班试验和前后段比较试验，用数据客观给出结论，指导下一步的课程思政建设。

【备注】 课程名称：概率论与数理统计。课程性质：通识教育选修课。所在专业：全校各专业。